Задача 1. (Штерн А.)

Вася прибавил к числителю и знаменателю правильной дроби одно и то же натуральное число, меньшее, как числителя, так и знаменателя. В результате дробь увеличилась более, чем на 50%. Вася утверждает, что, если он отнимет это число от числителя и знаменателя исходной дроби, то дробь уменьшится менее, чем на 50%. Может ли так быть?

Ответ: Нет. **Решение:**

$$\begin{cases} \dfrac{a+n}{b+n} > \dfrac{3}{2}\dfrac{a}{b} \\ \dfrac{a-n}{b-n} > \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ab + 2nb > 3ab + 3an \\ 2ab - 2nb > ab - an \end{cases} \Rightarrow 4ab > 4ab + 2an, \text{что невозможно}$$

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Домножено на возможно отрицательное число — не более 6 баллов ($\mp$)

Неравенства из условия ($b - n > 0, \quad b > a > 0$) при преобразовании системы можно использовать неявно

Задача 2. (Фольклор)

В коробке лежат шарики двух цветов: синего и красного (оба цвета присутствуют). Известно, что синих шариков больше, а два шарика одного цвета можно вынуть с той же вероятностью, что и два шарика разных цветов. Чему может быть равна разность между числом синих и красных шариков? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

Ответ: Любому натуральному числу больше 1. **Решение:**

Пусть синих m, красных n $(m > n)$.

Вероятность вынуть два шарика одного цвета $\left(\dfrac{n}{n+m}\right)\left(\dfrac{n-1}{n+m-1}\right) + \left(\dfrac{m}{n+m}\right)\left(\dfrac{m-1}{n+m-1}\right)$

Вероятность вынуть два шарика разных цветов $\left(\dfrac{n}{n+m}\right)\left(\dfrac{m}{n+m-1}\right) + \left(\dfrac{m}{n+m}\right)\left(\dfrac{n}{n+m-1}\right)$

То есть $n(n-1) + m(m-1) = nm + mn \Rightarrow (m-n)^2 = m + n$

Тогда, обозначив $m - n = a$, $\quad a^2 = n + n + a \Rightarrow a^2 - 2n - a = 0 \Rightarrow n = \dfrac{a^2 - a}{2}, m = \dfrac{a^2 + a}{2}$

$a = 1$ не подходит (по условию $n > 0$) При $a > 1$ m и n натуральные(т. к. у a и a^2 одинаковая чётность)

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Формулы для вероятностей не нуждаются в пояснении, но если существенно неправильные (например, если два шарика одного цвета берем неупорядоченно, а разных — упорядоченно) —0 баллов (−)

Без пояснений сразу написано $n(n-1) + m(m-1) = nm + mn$ и т. п.: не больше 11 баллов ($\pm$)

Если в решении найдено выражение $n = \dfrac{a^2 - a}{2}$, надо понять, когда $n(a)$ натуральное.
Для этого надо сказать, что $n(a)$ целое, и что $n(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$
Если проверено только одно из этого: 13 баллов (+.), ничего: 11 баллов ($\pm$)

Через разность выразили $m + n$ (или $\sqrt{m+n}$) — не меньше 8 баллов ($^+/_2$), m или n — не меньше 11 ($\pm$)
Через m выразили разность, и записали в ответ формулу $k(m)$ — если $k(m)$ всегда целое, 11 баллов ($\pm$)

Задача 3. (Штерн А.)

В ряд расставлены 2020 натуральных чисел так, что среди любых шести чисел, идущих подряд, первое число нацело делится на последнее, и среди любых девяти чисел, идущих подряд, последнее число нацело делится на первое. Докажите, что сумма первых ста чисел нацело делится на сумму последних ста чисел.

Решение:

Вместо "а делится на b" достаточно $a \geq b$, то есть $a_n \geq a_{n+5}, a_n \leq a_{n+8}$

В самом деле, $a_1 \geq a_{1+5*5=26} \geq a_{26-3*8=2}$, $\quad a_2 \geq a_{17} \geq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$

То есть для любой части последовательности из 26 элементов $a_1 = a_2 = a_{26} \Rightarrow$ все числа равны

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Доказывается, что например $a_6 = a_1$, используется a_{26}, говорится что аналогично $a_n = a_{n+5}$ для всех n

(Но не работает для $a_{n>2020-26}$) — не больше 11 баллов (±)

Решена задача с другими числами в условии — не больше 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Задача 4. (Куянов Ф.)

Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, для которых выполнены

равенства $\begin{cases} a + b = cd \\ c + d = ab \end{cases}$

Ответ: (2, 2, 2, 2), (1, 2, 3, 5), (2, 1, 3, 5), (1, 2, 5, 3), (2, 1,5, 3), (3, 5,1,2), (5, 3,1,2), (3, 5,2,1), (5, 3,2,1)

Решение:

$$\begin{cases} 0 = cd - a - b \\ 0 = ab - c - d \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = (cd - a - b) + (ab - c - d) + 2 = 2$$

Каждое из $(a-1)(b-1)$ и $(c-1)(d-1)$ — неотр. целое. Если это:

1 и 1 $\Rightarrow (a, b, c, d) = (2,2,2,2)$

0 и 2 $\Rightarrow (c-1)(d-1) = 2 \Rightarrow \{c, d\} = \{2,3\}, \{a, b\} = \{1, x\}, a + b = cd = 6 \Rightarrow b = 5$

2 и 0 даст перестановку. Осталось проверить, что все полученные наборы подходят под уравнения системы.

Критерии: Правильное решение: 15 баллов (+)

Не снижаем за потерю части случаев с перестановками 1,2,3,5

Считаем очевидными утверждения вида $a + b < ab$ при $a, b > 3$

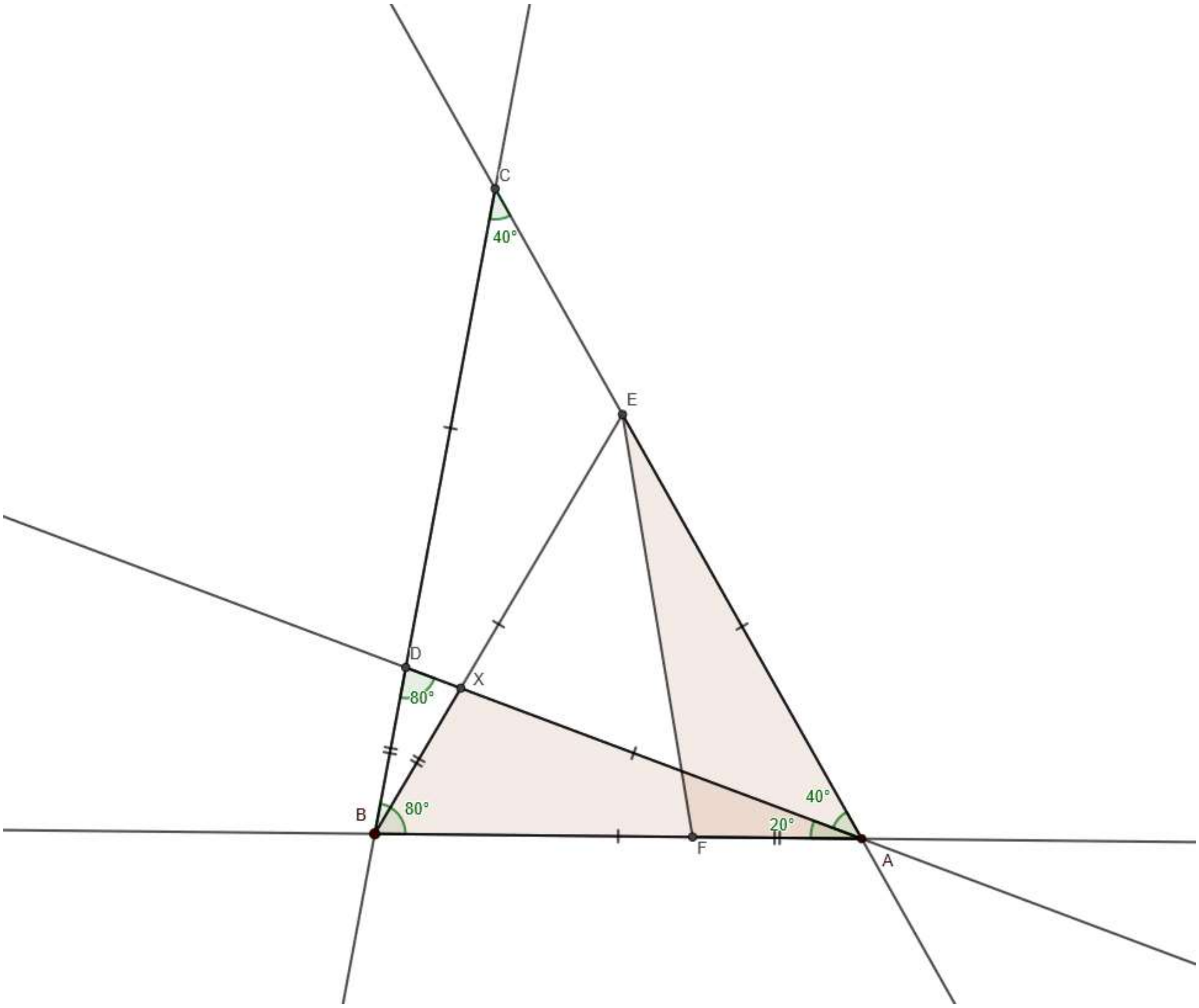
Нет проверки ответа (и односторонние следствия в решении): 13 баллов (+.)

Сведено к обозримому количеству случаев (например, доказано, что все числа меньше 6): 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Получено равенство $(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = (cd - a - b) + (ab - c - d) + 2 = 2$ или аналогичное: 8 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Задача 5. (по материалам Уральских турниров)

В треугольнике ABC угол B равен $80°$. На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB = AD = CD$
На стороне AB отмечена точка F такая, что $AF = BD$. На отрезке AC отмечена точка E такая, что $AB = AE$. Найдите угол AEF.



Ответ: $20°$. **Решение:**

Поскольку $AB = AD$ имеем $\angle ADB = \angle ABD = 80°$, а поскольку $AD = DC$, имеем $\angle DAC = \angle DCA = 40°$.
Поэтому $\angle BAE = 60°$, следовательно, треугольник ABE — правильный.
Тогда обозначив через X точку пересечения AD и BE имеем $\angle BXD = \angle BAX + \angle ABX = 80° = \angle BDX$, то есть $BX = BD$.
Из этого следует, что треугольники ABX и EAF равны по двум сторонам и углу между ними.
Таким образом, $\angle AEF = \angle BAX = 20°$.

Критерии: Правильное решение: 15 баллов ($+$)

Нашел и доказал равносторонний треугольник : не меньше 6 баллов ($\mp$)

Задача 6.

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если: а) $n = 404$? б) $n = 406$

Ответ: 202 цвета в обоих пунктах. **Решение:**

Пример для пункта а) на 202 цвета:

Назовем 198-блоком 198 подряд идущих домов, у которых любую пару домов на расстоянии 99 мы покрасили в уникальный цвет (то есть среди всех 404 домов нет других домов такого цвета)

Назовём 2-блоком пару домов, которую мы покрасили в уникальный цвет

Теперь покрасим 404 дома так: 2-блок, 198-блок, 2-блок, 2-блок, 198-блок, 2-блок

406 домов тоже можно покрасить в 202 цвета, добавив в конец два дома, цвет которых совпадает с последним 2-блоком.

Оценка в пункте а):

Для каждого цвета должно быть хотя бы 2 дома $\Rightarrow$ домов максимум 404

Оценка в пункте б):

Пусть мы смогли покрасить 406 домов в 203 цвета, то есть каждый цвет использован 2 раза.

Пронумеруем цвета в порядке появления при обходе домов, то есть для i цвета в него были покрашены дома с номерами a_i и b_i, причём $a_i < b_i$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{203}$

Заметим, что тогда и $b_1 < b_2 < \cdots < b_{203}$, так как если $i < j, b_i > b_j$, то $a_i < a_j < b_j < b_i$, но тогда любой отрезок, содержащий оба дома $i-$го цвета содержит и оба дома $j-$го цвета.

Теперь вместо раскраски домов рассмотрим последовательность букв a и b,
где a вместо домов, номер которых имеет вид a_i (а $b-$ где b_i)

Из первых 100 букв ровно одна b, ведь для 1ого цвета отрезок может быть только с первого по сотый дом

(То есть первый цвет нём встречается два раза, а любой другой- максимум 1)

Значит среди первых 100 букв 99 aшек. Значит среди букв от 100 до 199 как минимум 98 bшек

(Так как есть 98 чисел $a_{i\geq 2}$, для которых $b_i \geq 100$, но $b_i \leq 199$, так как $b_i - a_i \leq 99$)

Тогда среди первых 199 домов максимум 100 aшек, то есть $a_{101} \geq 200$

Аналогично, среди последних 199 домов максимум 100 bшек, $b_{103} \leq 206$, то есть

$$200 \leq a_{101} < a_{102} < a_{103} < b_{103} \leq 206, \qquad 200 \leq a_{101} < b_{101} < b_{102} < b_{103} \leq 206$$

Теперь рассмотрим сотню для a_{102} и b_{102}.
Либо она содержит 206, тогда она содержит a_{103} и b_{103}, либо она содержит 200, а тогда и a_{101}, b_{101}

Тогда эта сотня содержит и 2 дома другого цвета, противоречие

Критерии: Правильное решение: 25 баллов $(+)$

Проверять правильный пример не требуется, пример в пункте б) отдельно не оценивается

Пункт а) (пример плюс простая оценка): 13 баллов $\left({}^{+}/_{2}\right)$

Только пример: 8 баллов $(\mp)$